

# Основы проективной геометрии. Элементы центральной проекции.

## Построение перспективных изображений

### ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ СНИМКА И ОРТОГОНАЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ ПЛАНА

Пусть  $A, B, C$  и  $D$  (рис. 1) точки местности, а  $S$  – центр проекции. Тогда точки пересечения  $a, b, c, d$  плоскости  $P$  с проектирующими лучами  $AS, BS, CS$  и  $DS$  есть центральные проекции соответствующих точек местности. Такую же центральную проекцию можно построить и в том случае, если плоскость проекции  $P'$  провести по другую сторону от центра проектирования и на том же расстоянии от него. Действительно, если это сделать, то получим точки  $a', b', c'$  и  $d'$ , причем согласно условию  $Sa' = Sa, Sb' = Sb, Sc' = Sc$  и  $Sd' = Sd$ . Плоскость  $P$  проекции дает негативное (обратное) изображение точек местности, а  $P'$  – позитивное (прямое). То есть, позитив получается, когда объект и плоскость проекции помещены по одну сторону от центра проектирования, а негатив, если они расположены по разные стороны от него. Поскольку негатив и позитив располагаются симметрично относительно центра проекции, то они одинаковы (конгруэнтны). Отметим, что изображение объекта на плоскости снимка, полученное в центральной проекции, называется перспективным изображением. Если центр проектирования перенести на бесконечно большое расстояние относительно местности, то проектирующие лучи будут взаимно параллельны. Их пересечение с перпендикулярной к ним плоскостью дает ортогональную проекцию точек местности. В топографии такая проекция (при условии, что проектирующие лучи отвесны) называется горизонтальной.

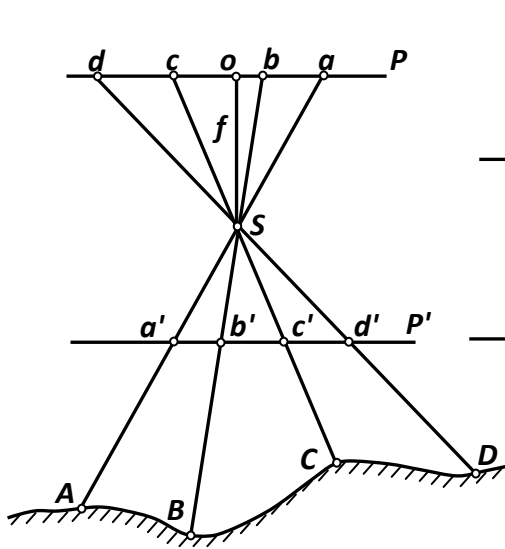


Рис. 1

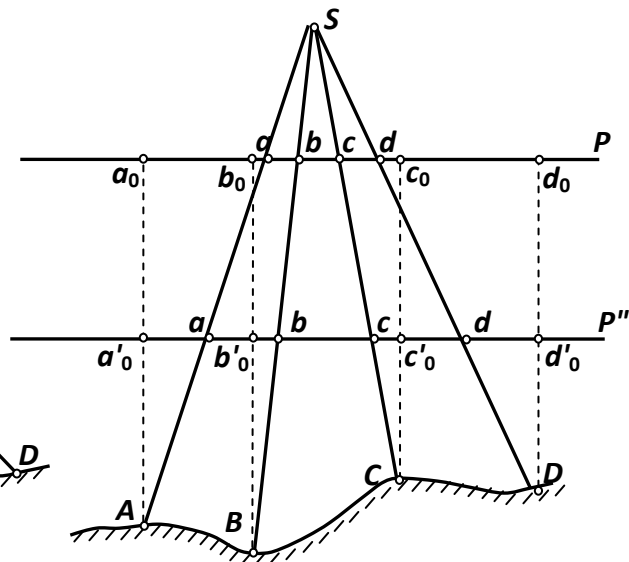


Рис. 2

Отличие между ортогональной (горизонтальной) и центральной проекциями видно на рис. 2. Точки местности  $A, B, C$  и  $D$  изображаются на плоскости  $P$  в центральной проекции в точках  $a, b, c, d$ , а в ортогональной проекции – в точках  $a_0, b_0, c_0, d_0$ . При перемещении плоскости проекции в положение  $P''$  взаимное положение точек  $a_0, b_0, c_0, d_0$ , построенных в ортогональной проекции, не нарушится. В то же время точки  $a', b', c', d'$ , построенные в центральной проекции, свое взаимное положение изменят.

Понятно, что для составления плана участка местности по его изображению на снимке необходимо перспективное изображение преобразовать в ортогональное. Но переносом центра проектирования в бесконечность такое преобразование практически не осуществить. Поэтому необходимо найти косвенные пути решения задачи.

## ЭЛЕМЕНТЫ И СВОЙСТВА ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ

Представление о элементах центральной проекции дает рис. 3, на котором

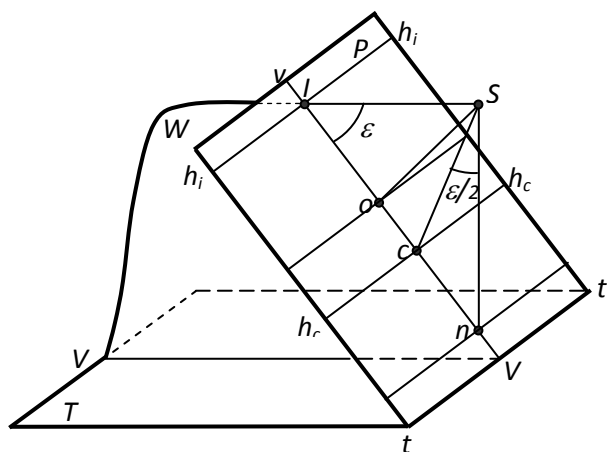


Рис. 3. Элементы центральной проекции

изображены:

- Плоскость  $T$ , в которой располагаются проектируемые точки **местности**, называется **плоскостью основания (плоскостью предмета)**.
- Плоскость  $P$ , куда проектируются эти точки, называется **плоскостью изображения (картины) или плоскостью снимка**. Предполагается, что плоскости  $T$  и  $P$  бесконечны и ограничение их линиями является условным.
- Двухгранный угол  $\varepsilon$  между плоскостями снимка и основания – это **угол наклона снимка**. Он произволен, но если равен нулю, то снимок считается горизонтальным.
- $S$  – **центр проекции**.
- Проектирующий луч  $So$ , перпендикулярный к плоскости снимка, называется **главным лучом**. Он должен совпадать с главной оптической осью фотокамеры, но в точности это не выполняется.
- Точка  $o$  пересечения главного луча с плоскостью снимка называется **главной точкой**, а расстояние  $So$  – его фокусным расстоянием  $f$ . Оно должно быть равно фокусному расстоянию фотокамеры.
- Точка  $n$  пересечения отвесного проектирующего луча, с плоскостью снимка называется **точкой надира**. Она является изображением точки  $N$  местности, которая в момент фотографирования находилась на одной отвесной линии (на линии перпендикулярной основанию) с передней узловой точкой объектива фотокамеры.
- Вертикальная плоскость  $W$ , проходящая через точки  $S, o, n$  называется **плоскостью главного вертикала**.
- След  $vv$  плоскости  $W$  на снимке это его **главная вертикаль**, а след  $VV$  плоскости  $W$  на основании называется **линией направления съемки**.
- Горизонтальный проектирующий луч  $Sl$ , лежащий в плоскости главного вертикала  $W$ , пересекает плоскость снимка в **главной точке схода**  $l$ .
- Точка  $c$  пересечения биссектрисы угла  $Son$  ( $\varepsilon$ ) с плоскостью снимка называется

**точкой нулевых искажений.** Она обладает важными свойствами, которые будут рассмотрены при изучении геометрической характеристики наклонного снимка. Точки  $I$ ,  $o$ ,  $c$  и  $n$  снимка располагаются на его главной вертикали.

- Линии  $hh$ , лежащие в плоскости  $P$  и перпендикулярные к главной вертикали, есть **горизонтали снимка**. Причем,  $h_i h_i$  – **линия основания**. Это линия пересечения плоскости снимка с плоскостью основания;  $h_c h_c$  – линия **неискаженного масштаба** – горизонталь, проходящая через точку нулевых искажений  $c$ ;  $h_o h_o$  – **главная горизонталь**, она проходит через главную точку снимка  $o$ ;  $h_i h_i$  – линия **действительного (истинного) горизонта** – линия пересечения снимка и горизонтальной плоскости (плоскости действительного горизонта), проходящей через центр проекции  $S$ .

Из анализа рис.3 следует справедливость следующих соотношений:

$$on = f \cdot \operatorname{tg} \varepsilon \quad (8)$$

$$oc = f \cdot \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} \quad (9)$$

$$oJ = f \cdot \operatorname{ctg} \varepsilon \quad (10)$$

$$SJ = f / \sin \varepsilon \quad (11)$$

#### Свойства центральной проекции

1. Перспективным изображением любой точка местности, например,  $A$ , является точка  $a$  и притом единственная (рис. 4). Любой точке снимка, например,  $a$  соответствует бесчисленное множество точек местности  $A, A_1$  и т.д.
2. Перспективным изображением любой прямой пространства, например  $BC$ , не проходящей через центр проекции, является прямая  $bc$ , и притом единственная. Но она изобразилась бы точкой, если бы располагалась на проектирующем луче, например прямая  $DK$  и точка  $d$  (или  $k$ ). Любому отрезку на снимке, например  $bc$ , соответствует бесчисленное число отрезков местности  $BC, B_1C_1$  и т.д.
3. Изображения любой системы взаимно параллельных прямых пространства, например

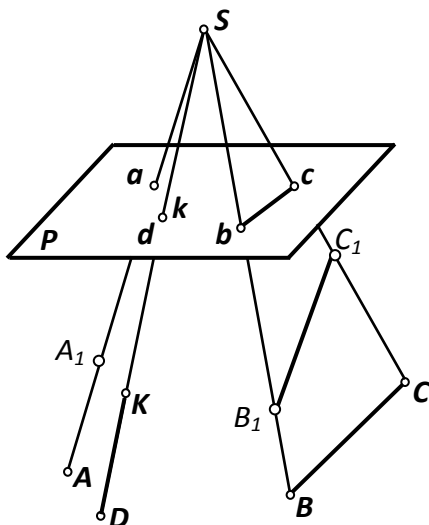


Рис.4

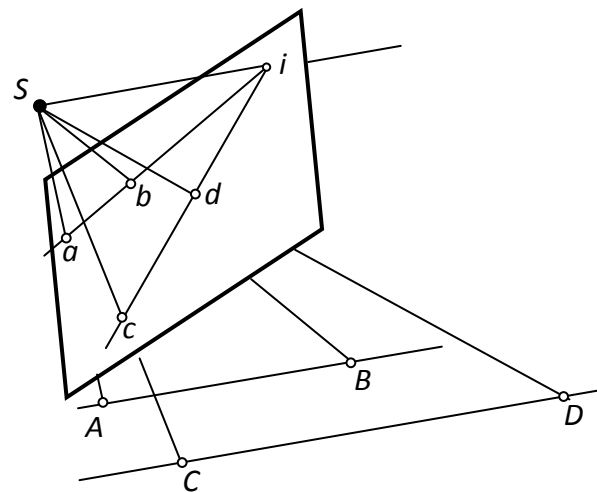


Рис. 5

$AB\ CD$  и т.д., сходятся на снимке в одной точке  $i$ , которая называется **точкой схода**. Для того, чтобы ее получить необходимо из центра проекции провести проектирующий луч параллельно системе прямых пространства. Там, где он пересечет плоскость снимка и находится точка схода (рис.5). Любая система прямых линий, параллельных плоскости снимка, имеет точку схода в бесконечности. Если параллельные прямые находятся на местности (в плоскости основания), то точка схода их изображений расположена на **линии  $h_ih_i$  действительного горизонта**.

Построение изображения семейства отрезков, лежащих в плоскости основания и параллельных линии направления съемки (или составляющих с ним угол  $\varphi$ ), выполняют следующим образом.

1. Отрезки продолжают до пересечения с линией основания картины. Полученные точки, принадлежат двум плоскостям – плоскости основания и плоскости снимка (картины).
2. На плоскости снимка находят положение главной точки схода  $J$ , и строят линию  $h_ih_i$  перпендикулярную главной вертикали (линию действительного горизонта).
3. Через центр проекции  $S$  проводят луч, параллельный заданным отрезкам. Он будет расположен в плоскости действительного горизонта. Пересечение этого луча с линией  $h_ih_i$  определяет точку схода  $J'$  изображений отрезков.
4. Соединяют прямыми линиями точку  $J'$  с точками, полученными на линии основания картины. Эти линии на снимке есть изображение лучей, идущих от линии основания картины, через заданные отрезки и до бесконечности.
5. Проводят проектирующие лучи через точки, ограничивающие отрезки. Их пересечение с построенными на снимке линиями и определяет искомое изображение.

По этому правилу и построены изображения прямых, параллельных направлению съемки (рис.6) и прямой, составляющей с направлением съемки угол  $\varphi$  (рис.7).

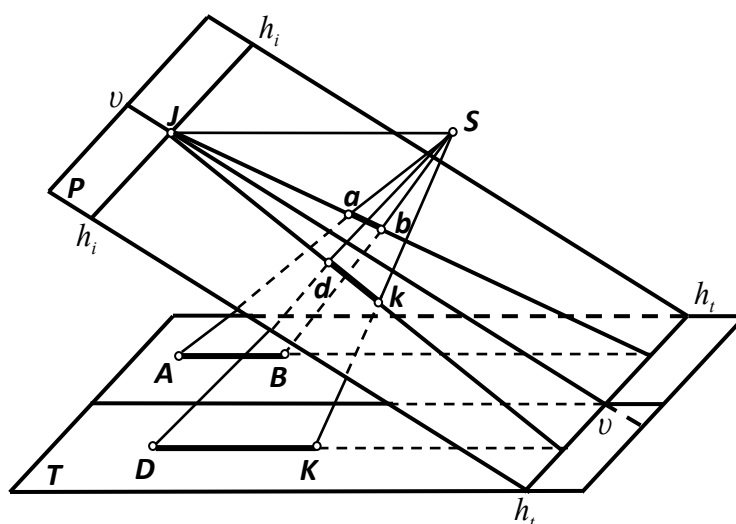
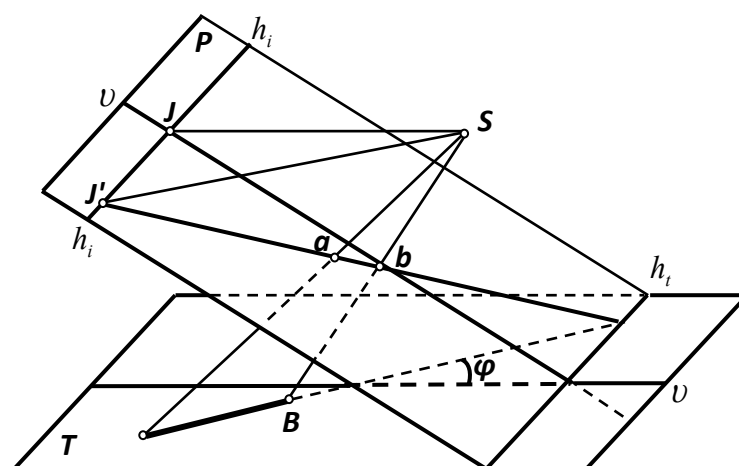


Рис.6

Точка схода изображений вертикальных (отвесных) прямых совпадает с точкой надир  $n$  (рис. 7). Пересечение  $B_o$  отрезка  $AB$  с плоскостью снимка находится на следе вертикальной плоскости, проходящей через прямую  $AB$  и параллельной плоскости



главного вертикала,. Поэтому отрезок  $NB_o$  есть изображение бесконечного отвесного луча, идущего из точки  $B_o$ . Проекция точек  $A$  и  $B$  принадлежат этому отрезку, значит для их построения достаточно провести проектирующие лучи. Аналогичным образом на рис. 16 построено изображение вертикальной прямой  $DK$ . Решение задачи можно было начать и с построения точки  $A$ , которая принадлежит плоскости основания.

### Возможны и других приемы построения изображений параллельных линий

Если вращать плоскость истинного горизонта вокруг линии истинного горизонта и картину вокруг основания картины до совпадения этих плоскостей с местностью, то мы получим совмещенное положение, которое называют *эпюром*. Может быть *эпюр растяжения* (рис. 5, а) и *эпюр сложения* (рис. 5, б). В первом случае центр проекции, перспектива и предмет будут находиться по разные стороны от основания картины. Во втором случае центр проекции совпадает с точкой нулевых искажений, а перспектива и

предмет будут находиться в одной плоскости. Главная вертикаль совместится с ЛНС, а линия истинного горизонта и основание картины останутся к ним перпендикулярны.

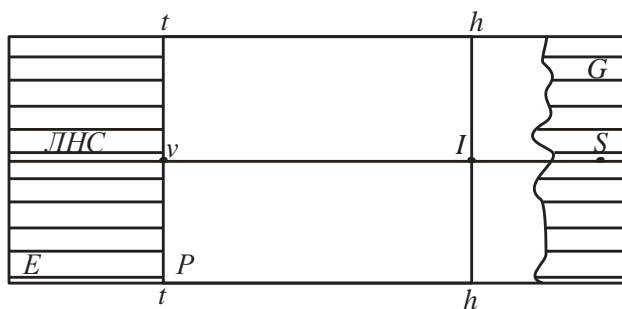


Рис. 5. а) эпюр растяжения

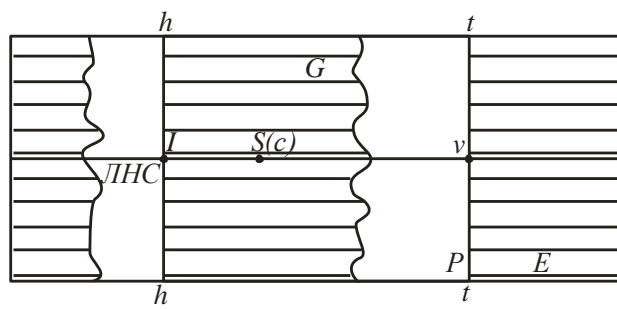


Рис. 5. б) эпюр сложения

### Способы построения перспектив объектов местности

Чтобы построить *перспективу точки предмета* (рис. 6), необходимо провести через эту точку вспомогательную прямую в плоскости предмета параллельно ЛНС и получить на основании картины двойную точку  $t_A$ . Ее соединяют с главной точкой схода  $i$  и получают перспективу вспомогательной бесконечной прямой  $it_A$ . Затем соединяют точку предмета  $A$  и центр проекции  $S$  проектирующим лучом. Там, где этот луч пересекается с перспективой вспомогательной прямой  $it_A$ , получают искомую перспективу точки  $a$ . На эпюрах сложения и растяжения (рис. 7) построение

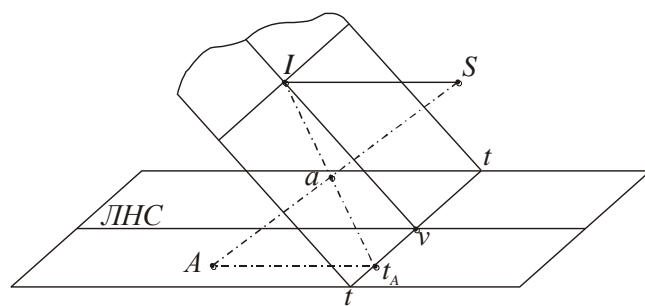


Рис. 6. Построение перспективы точки в изометрии

перспективы точки выполняется аналогично. Вспомогательную прямую можно провести и в произвольном направлении, но в этом случае ее перспектива отыскивается по-другому.

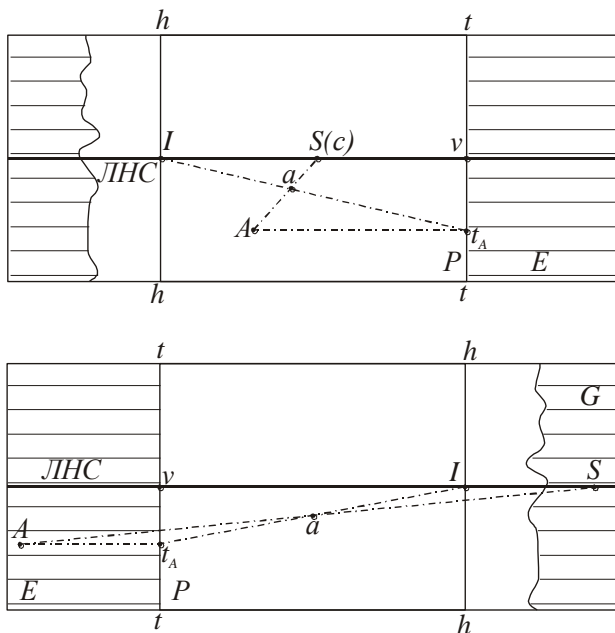


Рис. 7. Построение перспективы точки на эпюрах сложения и растяжения

Чтобы построить *перспективу произвольного отрезка AB* плоскости местности, находят перспективу бесконечной прямой, проходящего через него. Для этого продлевают отрезок до основания картины (рис. 8 и 9), и находят двойную точку  $t_{AB}$ . Затем из центра проекции  $S$  проводят прямую  $Si_{AB}$ , параллельную искомому отрезку  $AB$  (она лежит в плоскости истинного горизонта) и на линии истинного горизонта находят боковую точку схода

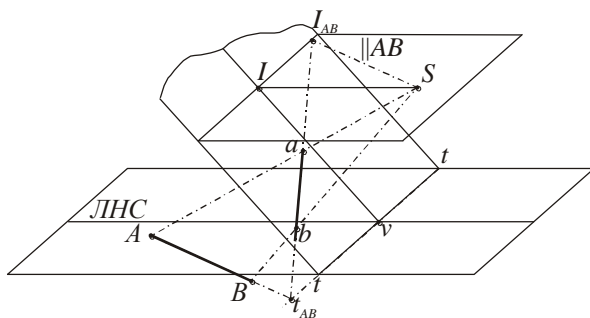


Рис. 8. Построение перспективы произвольного отрезка в изометрии

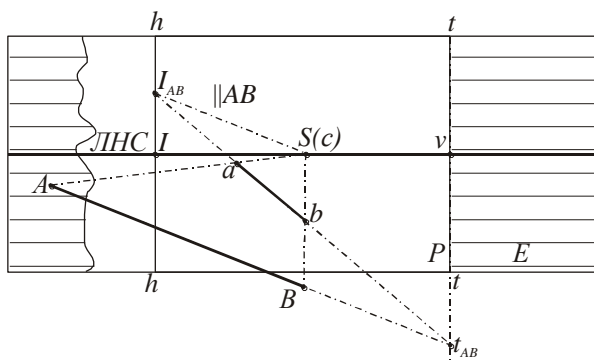


Рис. 9. Построение перспективы произвольного отрезка на эпюре сложения

из центра проекции  $S$  луча, параллельного исходной прямой (например,  $AD$ ), до пересечения с картиной (необходимо провести вспомогательную плоскость истинного горизонта, если исходные отрезки находятся не в горизонтальной плоскости).

$i_{AB}$ . Соединяют точки  $t_{AB}$  и  $i_{AB}$  прямой, которая расположена на картине и является искомой перспективой прямой предмета. Проведя от точек  $A$  и  $B$  исходного отрезка проектирующие лучи в центр проекции  $S$ , находят на их пересечении с полученной перспективой  $t_{AB}$   $i_{AB}$  искомый отрезок  $ab$  – перспективу исходного отрезка  $AB$  местности.

Если предмет объемный, то можно получить его перспективу по отрезкам в изометрии как показано на рис. 10. Для нахождения перспективы отрезка предмета, который расположен в пространстве и не совпадает с предметной плоскостью, находят двойную точку (например,  $t_{AD}$ ), там, где исходный отрезок  $AD$  после продления пересекает картину (проводят вспомогательную предметную плоскость, например, через  $ABCD$ ). Боковую точку схода находят аналогично проведением из

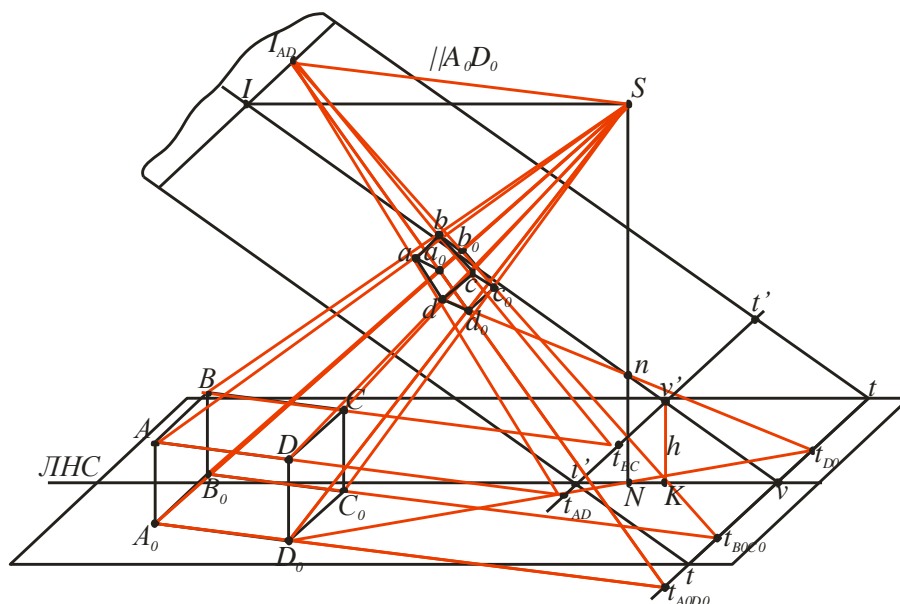


Рис. 10. Построение перспективы объемного объекта

Таким образом, точка надира снимка является боковой точкой схода для отвесных и вертикальных прямых пространства предмета.